a) Prouver que φ est une bijection de $\mathbf{R}_+$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Expliciter φ^{-1}.

Exercice 17 :

Soit $\alpha \in]0,1[$ et $\varphi_\alpha : [0,\pi] \to \mathbf{R}$

$$x \mapsto \alpha\cos(\alpha x)\sin x - \sin(\alpha x)\cos x$$

1°/a) Etudier les variations de φ_α sur $[0,\pi]$.

b) Montrer que $\forall x \in [0,\pi]$, on a : $\varphi_\alpha(x) > 0$.

2°/ Soit $f_\alpha :]0,\pi[\to \mathbf{R}$

$$x \mapsto \frac{\sin(\alpha x)}{\sin x}$$

a) Calculer $\lim\limits_{0^+} f_\alpha$ et $\lim\limits_{\pi^-} f_\alpha$.

b) Etudier les variations de f_α.

c) Vérifier que $f_\alpha(x) = \alpha + \frac{1-\alpha^2}{2}$. Montrer que (E) a une seule solution dans l'intervalle $]0,\pi[$.

Exercice 18 :

Soit $f :]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to \mathbf{R}$

$$x \mapsto \tan x$$

1°/a) Etudier les variations de f.

b) Donner l'équation de la tangente (Δ) à C_f au point $x_0 = 0$.

c) Etudier la position de C_f et (Δ).

2°/a) Montrer que f est une bijection de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbf{R}$.

b) On note g la réciproque de f.

Prouver que g est dérivable sur $\mathbf{R}$ et que : $\forall x \in \mathbf{R}$, $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

3°/a) Prouver que g est une fonction impaire.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x)}{x}$.